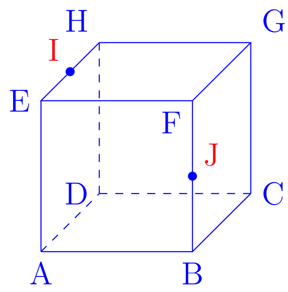

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.
On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.

   E a pour coordonnées $(0,0,1)$ et $H(0,1,1)$ donc I a pour coordonnées $(0,\frac{1}{2},1)$

   F a pour coordonnées $(1,0,1)$ et $B(1,0,0)$ donc J a pour coordonnées $(1,0,\frac{1}{2})$

2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

   On a $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix}-1\\1/2\\1\end{pmatrix}$

   or $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{n} = 0\times 1+(-2)\times 1+2\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{BG}\perp\overrightarrow{n}$ et
   $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{n} = -1\times 1+(-2)\times\frac{1}{2}+2\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{BI}\perp\overrightarrow{n}$
   $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI) donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI)

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

   Puisque $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI), une équation cartésienne a pour forme $x-2y+2z+d=0$

   Ce plan passe par B donc les coordonnées de B vérifient son équation

   donc $x_B-2y_B+2z_B+d=0$ donc $1+d=0$ et finalement $x-2y+2z-1=0$

   (c) On note K le milieu du segment [HJ]. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?

   Les coordonnées de K sont $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{4})$ or $x_K-2y_K+2z_K-1=0$ donc $k\in$(BGI).

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

   (a) En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\dfrac{1}{6}$.

   Sur la face EFGH du cube, le triangle FIG a pour hauteur 1 et pour base 1, son aire est donc égale à $\frac{1}{2}$

   Le volume du tétraèdre FBIG étant égal à $\frac{1}{3}\times$base$\times$hauteur $=\frac{1}{3}\times$aire de FIG$\times$BG$=$ $\frac{1}{6}$

   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).

   La droite Δ passant par F et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}$ donc elle est représentée par $\begin{cases} x = 1+k \\ y = 0 \quad -2k \\ z = 1+k \end{cases}$

(c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F′. Montrer que le point F′ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{5}{9}\right)$.

La droite Δ coupe le plan (BGI) en F′ dont les coordonnées sont solutions du système

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -2t \\ z &= 1+2t \\ x-2y+2z-1 &= 0 \end{cases}$$

On cherche t qui vérifie $(1+t)-2(-2t)+2(1+2t)-1=0$ c'est-à-dire
$1+t+4t+2+4t-1=0 \iff 9t=-2 \iff t=-\frac{2}{9}$.

On en déduit $\begin{cases} x = & 1+t = 1-\frac{2}{9} & = \frac{7}{9} \\ y = & -2t = -2\times\left(-\frac{2}{9}\right) & = \frac{4}{9} \\ z = & 1+2t = 1+2\times\left(-\frac{2}{9}\right) & = \frac{5}{9} \end{cases}$.

Le point F′ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9};\frac{4}{9};\frac{5}{9}\right)$

(d) Calculer la longueur FF′. En déduire l'aire du triangle BGI.

$\mathrm{FF}'^2 = \left(\dfrac{7}{9}-1\right)^2+\left(\dfrac{4}{9}-0\right)^2=\left(\dfrac{5}{9}-1\right)^2 = \dfrac{4}{81}+\dfrac{16}{81}+\dfrac{16}{81}=\dfrac{36}{81}=\dfrac{4}{9}$ donc $\mathrm{FF}'=\dfrac{2}{3}$.

On calcule d'une deuxième façon le volume du tétraèdre FBIG :
$\dfrac{1}{3}\times(\text{aire de BGI})\times\mathrm{FF}'$ cela donne $\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}\times(\text{aire de BGI})\times\dfrac{2}{3}$
ce qui entraîne que l'aire de BGI est égale à $\dfrac{3}{4}$.