On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1. Déterminer les limites respectives de f en $+\infty$ et $-\infty$.

   Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{0}{1+0} = 0$

   Par ailleurs : $f(x) = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$ or $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

2. Montrer que la dérivée de f est définie par $f'(x) = e^x(1+e^x)^2$. Étudier le sens de variation de f.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

   Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ on a aussi $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) + f(-x) = 1$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{e^x+1}$ en multipliant numérateur et dénominateur par e^x

   donc $f(x) + f(-x) = \dfrac{1}{e^x+1} + \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1}{e^x+1} = 1$

4. En déduire que les points M et M' de coordonnées respectives $(x; f(x))$ et $(-x; f(-x))$ sont symétriques par rapport au point A de coordonnées $(0; 1/2)$.

   "M et M' sont symétriques par rapport à A" équivaut à "A est le milieu de $[MM']$"

   or les coordonnées du milieu de $[MM']$ sont $\dfrac{x_M + x_{M'}}{2} = \dfrac{x+(-x)}{2} = 0 = x_A$ et $\dfrac{y_M + y_{M'}}{2} = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = \dfrac{1}{2} = y_A$ d'après la question 3) a). On a donc prouvé que le milieu de $[MM']$ est A donc que M et M' sont symétriques par rapport à A.

5. Qu'en déduire à propos de (C) la courbe représentative de f ?

   La courbe représentant f admet donc le point A comme centre de symétrie.

6. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A.

   $f'(0) = \dfrac{1}{4}$ et $f(0) = 12$ donc l'équation réduite de la tangente en A est $y = \dfrac{x}{4} + 12$

7. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - f(x)$. Montrer que $\varphi'(x) = \dfrac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $\phi'(x) = \dfrac{1}{4} - f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{4(1+e^x)^2} = \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{4(e^x+1)^2} = \dfrac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$

8. Étudier les variations puis le signe de la fonction ϕ.

D'après ce qui précède $\varphi'(x) > 0$ donc φ est croissante sur $\mathbb{R}$. Or $\varphi(0) = \dfrac{1}{2} + 0 - f(0) = 0$ donc si $x > 0$ alors $\varphi(x) > 0$ et si $x < 0$ alors $\varphi(x) < 0$

9. En déduire la position de (C) par rapport à (T).

   si $x > 0$ alors $\varphi(x) > 0$ donc $\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} > f(x)$ donc la tangente est au dessus de la courbe.
   si $x < 0$ alors $\varphi(x) < 0$ donc $\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} < f(x)$ donc la tangente est au dessous de la courbe.

10. Tracer la courbe (C) et (T) (unité graphique 2cm).