On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1. Déterminer les limites respectives de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que la dérivée de f est définie par ; $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Étudier le sens de variation de f.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) + f(-x) = 1$.
4. En déduire que les points M et M' de coordonnées respectives $(x; f(x))$ et $(-x; f(-x))$ sont symétriques par rapport au point A de coordonnées $(0; 1/2)$.
5. Qu'en déduire à propos de (C) la courbe représentative de f ?
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A.
7. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - f(x)$. Montrer que $\varphi'(x) = \dfrac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$.
8. Étudier les variations puis le signe de la fonction φ.
9. En déduire la position de (C) par rapport à (T).
10. Tracer la courbe (C) et (T) (unité graphique 2cm).