

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2x + 3)e^{\frac{x}{4}}$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

En $+\infty$

D'une part $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{4}} = +\infty$

d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 3 = +\infty$ on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

En $-\infty$

D'une part $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{4}} = 0$ d'autre part $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 3 = -\infty$ on obtient une forme indéterminée.

Mais $f(x) = 2xe^{\frac{x}{4}} + 3e^{\frac{x}{4}}$ et on sait déjà $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{4}} = 0$

par ailleurs, le cours donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{x}{4}} = 0$ par croissances comparées

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$

2. Calculer la dérivée f' , étudier son signe et prévoir les variations de f .

La dérivée a pour forme $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

On obtient : $f'(x) = 2e^{\frac{x}{4}} + (2x + 3) \times \frac{1}{4} \times e^{\frac{x}{4}}$

Puis : $f'(x) = 2e^{\frac{x}{4}} + \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) \times e^{\frac{x}{4}}$

Puis : $f'(x) = e^{\frac{x}{4}} \times \left(2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)$

C'est à dire : $f'(x) = e^{\frac{x}{4}} \times \left(\frac{x}{2} + \frac{11}{4}\right)$

$e^{\frac{x}{4}}$ est toujours strictement positif

$\frac{x}{2} + \frac{11}{4} = 0$ ssi $\frac{x}{2} = -\frac{11}{4}$ elle s'annule donc en $x = -\frac{11}{2}$

Or $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{11}{4}$ est une fonction affine, strictement croissante

Elle est négative avant $-\frac{11}{2}$ puis positive après.

On dispose donc du tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{11}{2}$	$+\infty$
$e^{\frac{x}{4}}$		+	+
$\frac{x}{2} + \frac{11}{4}$		- 0 +	
$f'(x)$		- 0 +	
f	0	\searrow	\nearrow min

3. Montrer que la courbe représentant f passe par un minimum dont on précisera les coordonnées.

Puisque f est continue sur \mathbb{R} , est strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{11}{2}[$ puis strictement croissante sur $]-\frac{11}{2}; +\infty[$, la fonction admet un minimum en $x = -\frac{11}{2} = -5,5$ dont la valeur est $f\left(-\frac{11}{2}\right) = -8e^{-\frac{11}{8}} \approx -2,02$

4. Utiliser un grapheur pour dessiner la courbe sur $[-12; 2]$

