

On considère la suite définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 = 1$ avec $f(x) = \frac{2x + 10}{3x + 1}$

1. Résoudre $x = f(x)$, on appelle $x_1 < 0 < x_2$ les solutions.

$$x = f(x) \text{ équivaut à } x = \frac{2x + 10}{3x + 1} \text{ puis à } 3x^2 + x = 2x + 10 \text{ et } x \neq \frac{1}{3}$$

$$\text{donc } 3x^2 - x - 10 = 0 \text{ or } \Delta = 1 + 120 = 121 = 11^2 > 0$$

$$\text{donc } x = \frac{-(-1) - 11}{2 \times 3} = \frac{-5}{3} \neq \frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{-(-1) + 11}{2 \times 3} = 2 \neq \frac{1}{3}$$

$$\text{donc } x_1 = \frac{-5}{3} \text{ et } x_2 = 2$$

2. Montrer par récurrence que $U_n > 0$

Soit \mathcal{H} la proposition " $U_n > 0$ "

On a : $U_0 = 1 > 0$ donc \mathcal{H}_0 est vraie.

soit n un entier pour lequel \mathcal{H}_n est vraie, on a alors $U_n > 0$

$$\text{donc } 2U_n + 10 > 10 > 0 \text{ et } 3U_n + 1 > 1 > 0$$

$$\text{donc leur quotient est aussi strictement positif, c'est à dire } \frac{2U_n + 10}{3U_n + 1} > 0$$

$$\text{c'est à dire } U_{n+1} > 0$$

donc \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

\mathcal{H}_0 est vraie *le domino numéro 0 tombe*

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si \mathcal{H}_n est vraie alors \mathcal{H}_{n+1} aussi $\left\{ \begin{array}{l} \text{partout, si le domino numéro } n \\ \text{tombe alors le suivant portant le} \\ \text{numéro } n+1 \text{ tombe aussi} \end{array} \right.$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{H}_n est vraie. *donc tous les dominos tombent*

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien : $U_n > 0$

3. On considère alors $V_n = \frac{U_n - x_2}{U_n - x_1}$

(a) Montrer que (V_n) est géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \text{on a : } V_{n+1} &= \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + \frac{5}{3}} = \frac{\frac{2U_n + 10}{3U_n + 1} - 2}{\frac{2U_n + 10}{3U_n + 1} + \frac{5}{3}} = \frac{2U_n + 10 - 2(3U_n + 1)}{2U_n + 10 + \frac{5}{3}(3U_n + 1)} \\ &= \frac{-4U_n + 8}{7U_n + \frac{35}{3}} = \frac{-4}{7} \times \frac{U_n - 2}{U_n + \frac{5}{3}} = \frac{-4}{7} \times V_n \end{aligned}$$

donc la suite (V_n) est bien géométrique

$$\text{de raison } q = \frac{-4}{7} \text{ et de premier terme } V_0 = \frac{U_0 - 2}{U_0 + \frac{5}{3}} = \frac{-3}{8}$$

(b) En déduire V_n en fonction de n

D'après le cours, sachant que la suite (V_n) est géométrique, de raison $q = \frac{-4}{7}$ et de

premier terme $V_0 = \frac{-3}{8}$

$$\text{on a : } V_n = \frac{-3}{8} \times \left(\frac{-4}{7}\right)^n$$

(c) Exprimer U_n en fonction de V_n

Puisque $V_n = \frac{U_n - x_2}{U_n - x_1}$, on a : $V_n(U_n - x_1) = U_n - x_2$ donc $U_n V_n - x_1 V_n = U_n - x_2$

puis $U_n V_n - U_n = x_1 V_n - x_2$ donc $(V_n - 1) \times U_n = x_1 V_n - x_2$

$$\text{et enfin } U_n = \frac{x_1 V_n - x_2}{V_n - 1}$$

$$\text{Cela donne } U_n = \frac{\frac{-5}{3} V_n - 2}{V_n - 1}$$

on peut démontrer que $V_n \neq 1$, donc on peut diviser par $V_n - 1$

(d) En déduire U_n en fonction de n puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

D'après ce qui précède : $U_n = \frac{\frac{-5}{3} V_n - 2}{V_n - 1}$ et $V_n = \frac{-3}{8} \times \left(\frac{-4}{7}\right)^n$

$$\text{donc } U_n = \frac{\frac{-5}{3} \frac{-3}{8} \times \left(\frac{-4}{7}\right)^n - 2}{\frac{-3}{8} \times \left(\frac{-4}{7}\right)^n - 1} . \text{ C'est à dire } U_n = \frac{\frac{5}{8} \times \left(\frac{-4}{7}\right)^n - 2}{\frac{-3}{8} \times \left(\frac{-4}{7}\right)^n - 1} = g(n)$$

Puisque la raison $q = \frac{-4}{7}$ vérifie $|q| < 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{7}\right)^n = 0$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{-2}{-1} = 2$$

Pour vérifier avec un tableur

U_n	n	$g(n)$
1	0	1
3	1	3
1,6	2	1,6
2,275862069	3	2,275862069
1,859030837	4	1,859030837
2,085733423	5	2,085733423
1,952745731	6	1,952745731
2,027560592	7	2,027560592