

On considère la suite définie par $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{n}{5} + 1$ et $U_0 = 6$.

1. Quelles formules doit-on écrire dans A3 et B3 pour obtenir les premières valeurs de (U_n) en les "tirant vers bas" ?

	A	B	C
1	n	U_n	
2	0	6	
3			

Dans A3, on écrit =A2+1, dans B3 on écrit =2/3*B2+A2/5+1

2. Calculer U_1, U_2, \dots, U_{10} à 10^{-2} près.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_n	6	5	4,53	4,42	4,55	4,83	5,22	5,68	6,19	6,72	7,28

3. On considère alors la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$. Montrer que $V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n + \frac{1}{5}$.

$$\text{On a : } V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = \left(\frac{2}{3}U_{n+1} + \frac{n+1}{5} + 1 \right) - \left(\frac{2}{3}U_n + \frac{n}{5} + 1 \right)$$

$$\text{donc } V_{n+1} = \frac{2}{3}U_{n+1} + \frac{n+1}{5} + 1 - \frac{2}{3}U_n - \frac{n}{5} - 1$$

$$\text{donc } V_{n+1} = \frac{2}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n + \frac{n+1}{5} - \frac{n}{5}$$

$$\text{donc } V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n + \frac{1}{5}$$

4. On considère maintenant la suite $W_n = V_n - \frac{3}{5}$. Montrer que (W_n) est géométrique. On précisera sa raison et son 1er terme.

$$\text{On a : } W_{n+1} = V_{n+1} - \frac{3}{5} = \frac{2}{3}V_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{3}V_n - \frac{2}{5}$$

$$\text{or } W_n = V_n - \frac{3}{5} \text{ donc } V_n = W_n + \frac{3}{5}$$

$$\text{donc } W_{n+1} = \frac{2}{3} \left(W_n + \frac{3}{5} \right) - \frac{2}{5} = \frac{2}{3}W_n + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{3}W_n$$

5. En déduire W_n puis V_n en fonction de n .

$$\text{Puisque } (W_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{2}{3}$$

$$\text{et } W_0 = V_0 - \frac{3}{5} = U_1 - U_0 - \frac{3}{5} = -1 - \frac{3}{5} = -\frac{8}{5}$$

$$\text{on a : } W_n = -\frac{8}{5} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

$$\text{Puisque } V_n = W_n + \frac{3}{5}, \text{ on a : } V_n = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

6. Montrer que $U_n = 3 \times \left(1 + \frac{n}{5} - V_n \right)$. En déduire U_n en fonction de n .

$$\text{On a : } U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{n}{5} + 1 \text{ donc } U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{3}U_n + \frac{n}{5} + 1$$

$$\text{donc } V_n = -\frac{1}{3}U_n + \frac{n}{5} + 1 \text{ donc } \frac{1}{3}U_n = \frac{n}{5} + 1 - V_n$$

$$\text{donc } U_n = 3 \times \left(\frac{n}{5} + 1 - V_n \right)$$

$$\text{or } V_n = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

$$\text{donc } U_n = 3 \times \left(\frac{n}{5} + 1 - \frac{3}{5} + \frac{8}{5} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$\text{Ce qui devient : } U_n = 3 \times \left(\frac{n}{5} + 1 - \frac{3}{5} + \frac{8}{5} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$\text{c'est à dire : } U_n = 3 \times \left(\frac{n+2}{5} + \frac{8}{5} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

7. Déterminer le premier entier à partir duquel $\left| U_n - \frac{3}{5}(n+2) \right|$ est inférieur à 10^{-2} .

$$\text{On a : } d_n = U_n - \frac{3}{5}(n+2) = 3 \times \left(\frac{n+2}{5} + \frac{8}{5} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) - \frac{3}{5}(n+2)$$

$$\text{donc } d_n = \frac{3}{5}(n+2) + \frac{24}{5} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{3}{5}(n+2)$$

$$\text{donc } d_n = \frac{24}{5} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

$$\text{On doit résoudre : } \frac{24}{5} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n < \frac{1}{100}$$

$$\text{C'est à dire : } \left(\frac{2}{3} \right)^n < \frac{1}{480}$$

$$\text{puis } n \ln \frac{2}{3} < \ln \frac{1}{480}$$

$$\text{et enfin } n > \frac{\ln \frac{1}{480}}{\ln \frac{2}{3}} \text{ le sens a changé car } \ln \frac{2}{3} < 0$$

Le premier entier qui convient est $n = 16$

Pour vérifier :

$$U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{n}{5} + 1 \text{ et } U_0 = 6$$

$$f(n) = 3 \times \left(\frac{n+2}{5} + \frac{8}{5} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$d(n) = U_n - \frac{n+2}{5}$$

n	U_n	$f(n)$	$\frac{3}{5}(n+2)$	$d(n)$
0	6	6	1,2	4,8
1	5	5	1,8	3,2
2	4,533333333	4,533333333	2,4	2,133
3	4,422222222	4,422222222	3	1,422
4	4,548148148	4,548148148	3,6	0,948
5	4,832098765	4,832098765	4,2	0,632
6	5,221399177	5,221399177	4,8	0,421
7	5,680932785	5,680932785	5,4	0,280
8	6,187288523	6,187288523	6	0,187
9	6,724859015	6,724859015	6,6	0,1245
10	7,283239344	7,283239344	7,2	0,083
11	7,855492896	7,855492896	7,8	0,055
12	8,436995264	8,436995264	8,4	0,036
13	9,024663509	9,024663509	9	0,024
14	9,616442339	9,616442339	9,6	0,016
15	10,21096156	10,21096156	10,2	0,011
16	10,80730771	10,80730771	10,8	0,007
17	11,4048718	11,4048718	11,4	0,0048
18	12,00324787	12,00324787	12	0,0032