

[Révisions purement mathématiques]

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (12x^2 + 22x + 3)e^{-2x}$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\text{On a : } f(x) = x^2 \times \left(12 + \frac{22}{x} + \frac{3}{x^2}\right) e^{-2x} = \left(12 + \frac{22}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \times \left(\frac{e^x}{x}\right)^{-2}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)^{-2} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(12 + \frac{22}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 12 + 0 + 0 = 12$$

$$\text{donc par produit } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

$$\text{On a : } f(x) = x^2 \times \left(12 + \frac{22}{x} + \frac{3}{x^2}\right) e^{-2x}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(12 + \frac{22}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 12 + 0 + 0$$

$$\text{donc par produit } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$$

2. Montrer que \mathcal{C}_f admet une asymptote horizontale Δ . En donner une équation.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, la droite Δ d'équation $y = 0$, c'est à dire l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe représentant f au voisinage de $+\infty$

3. Déterminer la position de \mathcal{C}_f par rapport à Δ en fonction de x

Il suffit d'étudier le signe de $f(x) - 0 = f(x) = (12x^2 + 22x + 3)e^{-2x}$. Comme $e^{-2x} > 0$, le signe du produit est le signe de $(12x^2 + 22x + 3)$

Le discriminant est $\Delta = 22^2 - 4 \times 3 \times 12 = 340 > 0$, ses racines sont $\frac{-22 \pm \sqrt{340}}{2 \times 12}$ c'est

$$\text{à dire } x = -1 \pm \frac{2\sqrt{22}}{11}$$

Notons $x_1 = -1 - \frac{2\sqrt{22}}{11}$ et $x_2 = -1 + \frac{2\sqrt{22}}{11}$, on peut alors établir le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$12x^2 + 22x + 3$	+	0	-	0	+
e^{-2x}	+		+		+
$f(x) - y_\Delta$	+	0	-	0	+
\mathcal{C}_f par rapport à Δ	au dessus	0	en dessous	0	au dessus

4. Calculer la dérivée f' puis établir le tableau des variations de f en fonction de x

$$f'(x) = (24x + 22)e^{-2x} + (12x^2 + 22x + 3)(-2)e^{-2x} = (-24x^2 - 20x + 16)e^{-2x}$$

Les racines du polynôme du second degré sont $x_1 = \frac{-4}{3}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

On peut alors établir le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$-24x^2 - 20x + 16$	-	0	+	0	-
e^{-2x}	+		+		+
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$f(\frac{-4}{3})$	$f(\frac{1}{2})$	0	

5. Montrer que f admet deux extrema relatifs . En donner les valeur à 10^{-1} près.

Puisque f est continue sur \mathbb{R} et décroissante sur $] - \infty; \frac{-4}{3}[$ puis strictement croissante sur $]\frac{-4}{3}; \frac{1}{2}[$

f admet en $\frac{-4}{3}$ un minimum local dont la valeur est $f(\frac{-4}{3}) \approx -72, 0$ à 10^{-1} près

Puisque f est continue sur \mathbb{R} et strictement croissante sur $]\frac{-4}{3}; \frac{1}{2}[$ puis décroissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

f admet en $\frac{1}{2}$ un maximum local dont la valeur est $f(\frac{1}{2}) \approx 6, 3$ à 10^{-1} près

6. Déterminer les réels a, b et c tels que $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ soit une primitive de f sur \mathbb{R} .

F est une primitive de f lorsque $F' = f$. Or $F'(x) = (2ax + b)e^{-2x} + (ax^2 + bx + c)(-2)e^{-2x} = (-2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c)e^{-2x}$

En identifiant les termes en x^2 , ceux en x et ceux sans x , on obtient le système :

$$\begin{cases} -2a & = & 12 \\ 2a - 2b & = & 22 \\ b - 2c & = & 3 \end{cases} \quad \text{donc } a = -6 \text{ puis } b = -17 \text{ puis } c = -10$$

Une primitive de f est alors $F(x) = -(6x^2 + 17x + 10)e^{-2x}$

7. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 f(x)dx$

$$I = \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = -33e^{-2} + 10$$