Les calculs fastidieux peuvent être réalisés à la calculatrice pour éviter les erreurs.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont clairement non proportionnels donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. On doit avoir $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc $-5 + 2a + b = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc $-1 + 3a + 5b = 0$

   Les nombres a et b vérifient donc le système $\begin{cases} 2a + b & = 5 \\ 3a + 5b & = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} b & = 5 - 2a \\ 3a + 5(5 - 2a) & = 1 \end{cases}$

   donc $\begin{cases} b & = 5 - 2a \\ -7a & = -24 \end{cases}$ puis $\begin{cases} b = 5 - \frac{48}{7} = \frac{-13}{7} \\ a = \frac{24}{7} \end{cases}$ et finalement : $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{24}{7} \\ \frac{-13}{7} \end{pmatrix}$
3. Puisque $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan ABC, $\overrightarrow{n}$ est normal à ABC.

   Une équation de ABC est alors : $7x + \frac{24}{7}y - \frac{13}{7}z + d = 0$

   Ce plan passe par A donc $7x_A + \frac{24}{7}y_A - \frac{13}{7}z_A + d = 0$ donc $35 + \frac{24}{7} + d = 0$ donc $d = \frac{-59}{7}$

   Une équation de ABC est donc : $7x + \frac{24}{7}y - \frac{13}{7}z - \frac{29}{7} = 0$ on peut tout multiplier par 7 et obtenir aussi $\boxed{7x + 24y - 13z - 59 = 0}$

   A ce stade, on peut facilement vérifier que les coordonnées de chacun des pointa A, B et C vérifient cette équation.
4. Δ est perpendiculaire à ABC donc elle est dirigée par un vecteur normal à ABC, c'est à dire par le vecteur $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ -13 \end{pmatrix}$

   Une représentation paramétrique de Δ est alors : $\begin{cases} x & = & 1 & + & 7t \\ y & = & 1 & + & 24t \\ z & = & 1 & - & 13t \end{cases}$
5. H est à l'intersection de Δ et de ABC

   donc $\begin{cases} x & = & 1 & + & 7t \\ y & = & 1 & + & 24t \\ z & = & 1 & - & 13t \end{cases}$ et $7x + 24y - 13z - 59 = 0$

   ce qui donne : $7(1 + 7t) + 24(1 + 24t) - 13(1 + 13t) - 59 = 0$ c'est à dire $456t - 41 = 0$ donc $t = \dfrac{41}{794}$

   Puis en remplaçant dans l'équation de Δ cela donne : $x = \dfrac{1081}{794}$ et $y = \dfrac{889}{397}$ et $z = \dfrac{261}{794}$

   Le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{1081}{794} ; \dfrac{889}{19} ; \dfrac{261}{397}\right)$
6. Si M est un autre point du plan alors $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{HD}$

   donc HDM est un triangle rectangle dont DM est l'hypoténuse.

   donc $DM \geqslant DH$
7. La distance entre D et (ABC) est égale à $DH = \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (y_H - y_D)^2}$

   La calculatrice donne $DH = \dfrac{41}{\sqrt{794}}$