

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
on considère les points $A(5; 1; 0)$, $B(0; 3; 1)$ et $C(4; 4; 5)$

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les réels a et b pour que le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit orthogonal à \overrightarrow{AB} et à \overrightarrow{AC} .
3. En déduire une équation cartésienne du plan ABC .
4. On considère alors le point $D(1; 1; 1)$, donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC) .
5. Déterminer les coordonnées de l'intersection de Δ avec ABC que l'on note H .
6. Montrer que si M est un point du plan ABC alors $DM \geq DH$. On affirme donc que DH est la distance entre le point D et le plan ABC .
7. En déduire la distance entre D et ABC .
8. [bonus] déterminer la surface du triangle ABC puis le volume du tétraèdre $ABCD$.