

EXERCICE 1 Transformée de Laplace de fonctions usuelles

On note u l'échelon unité :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On rappelle les transformées de Laplace usuelles :

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p}, \quad \mathcal{L}\{t u(t)\} = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} = \frac{1}{p-a}, \quad \mathcal{L}\{\sin(at)u(t)\} = \frac{a}{p^2 + a^2},$$

$$\mathcal{L}\{\cos(at)u(t)\} = \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

Déterminer la transformée de Laplace $F(p)$ de chacune des fonctions suivantes.

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1. $f(t) = 3u(t).$ | 5. $f(t) = 2 \cos(4t)u(t).$ |
| 2. $f(t) = 5t u(t).$ | 6. $f(t) = 2u(t) + 3t u(t).$ |
| 3. $f(t) = 4e^{2t}u(t).$ | 7. $f(t) = e^{-3t}u(t) + 2 \sin(2t)u(t).$ |
| 4. $f(t) = 3 \sin(5t)u(t).$ | 8. $f(t) = 4 \cos(3t)u(t) - t u(t).$ |

EXERCICE 2 Retrouver l'original à partir de sa transformée de Laplace

On cherche ici la fonction $f(t)$ dont la transformée de Laplace est $F(p)$.

Pour certaines fonctions, il sera nécessaire de commencer par décomposer $F(p)$ en éléments simples.

Déterminer l'original $f(t)$ de chacune des fonctions suivantes.

- | | | | |
|----|----------------------------|-----|---------------------------------------|
| 1. | $F(p) = \frac{3}{p}.$ | 6. | $F(p) = \frac{2}{p} + \frac{3}{p^2}.$ |
| 2. | $F(p) = \frac{5}{p^2}.$ | 7. | $F(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{4}{p}.$ |
| 3. | $F(p) = \frac{2}{p-3}.$ | 8. | $F(p) = \frac{2p+6}{p^2+9}.$ |
| 4. | $F(p) = \frac{4}{p^2+16}.$ | 9. | $F(p) = \frac{5p+10}{p^2+25}.$ |
| 5. | $F(p) = \frac{3p}{p^2+9}.$ | 10. | $F(p) = \frac{3}{p(p+2)}.$ |

Pour la dernière question, on pourra rechercher deux constantes a et b telles que

$$\frac{3}{p(p+2)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+2}.$$