

Table des matières

1	La dérivation : une approximation locale efficace	1
1.1	Pourquoi étudier la dérivée ?	1
1.2	De la corde à la tangente	2
1.3	Le nombre dérivé	3
1.4	Équation de la tangente	4
2	Fonction dérivée	5
2.1	Des nombres dérivés aux fonctions dérivées	5
2.2	Dérivées des fonctions usuelles	5
2.3	Dérivées et opérations	6
3	Variation d'une fonction	7
3.1	Propriété	7
3.2	Méthode	7
3.3	Exemple	8
4	Recherche d'extrema	8
4.1	Propriété	8
4.2	Exemple	8

1 La dérivation : une approximation locale efficace

1.1 Pourquoi étudier la dérivée ?

On considère une fonction f dont le calcul est complexe et nécessite un temps important. On souhaite calculer 100 000 images de nombres proches d'un même nombre a .

Par exemple, on veut calculer les images de

$$a, \quad a + 0,001, \quad a + 0,002, \quad \dots$$

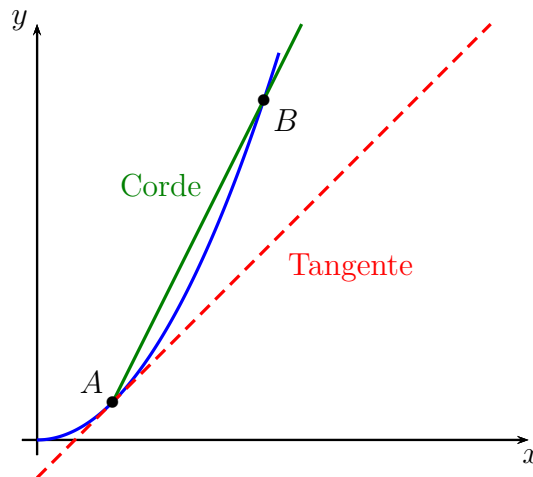
Le calcul exact de chaque image peut être coûteux.

Une idée consiste à remplacer localement la courbe représentative de f par une droite, plus facile à utiliser : sa tangente au point d'abscisse a .

Pour chaque nombre x proche de a , on approche alors $f(x)$ par une expression de la forme

$$f(x) \approx mx + p.$$

Le calcul d'une valeur de cette expression ne nécessite que quelques opérations arithmétiques.



Exemple de gain de temps Supposons que le calcul exact d'une image nécessite 1 milliseconde et que le calcul de son approximation affine nécessite 0,01 milliseconde. Pour 100 000 images, on obtient :

Méthode	Temps de calcul
Calcul exact	100 s
Approximation affine	1 s

Le temps de calcul est ainsi divisé par 100, sans compter le temps nécessaire à la préparation de l'approximation.

Cette approximation n'est pas exacte, mais elle peut être très précise lorsque x est suffisamment proche de a .

1.2 De la corde à la tangente

On considère une fonction f , définie sur un intervalle, et deux nombres distincts a et b .

Les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ appartiennent à la courbe représentative de f .

La droite (AB) , qui passe par ces deux points, est appelée une **corde** de la courbe.

Son coefficient directeur est

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

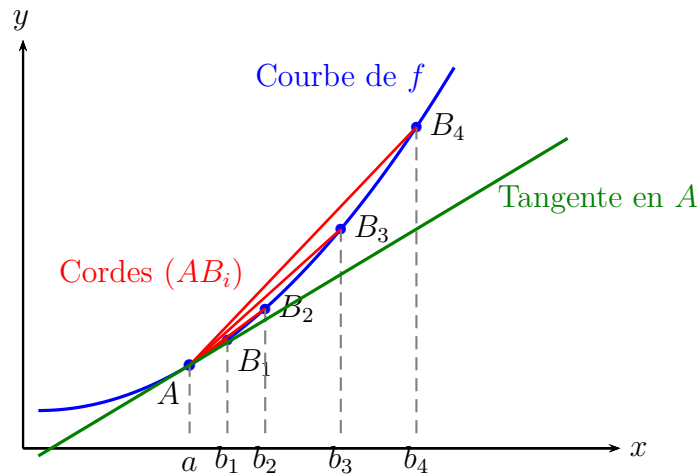
Cette expression mesure la variation moyenne de f entre a et b pour une unité d'augmentation de l'abscisse.

On peut aussi écrire

$$m = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad h = b - a \neq 0.$$

Faisons maintenant tendre b vers a , c'est-à-dire h vers 0.

Si les coefficients directeurs des cordes se rapprochent d'un nombre réel L , la corde tend vers une droite appelée **tangente** à la courbe au point A . Le nombre L est alors le coefficient directeur de cette tangente.



1.3 Le nombre dérivé

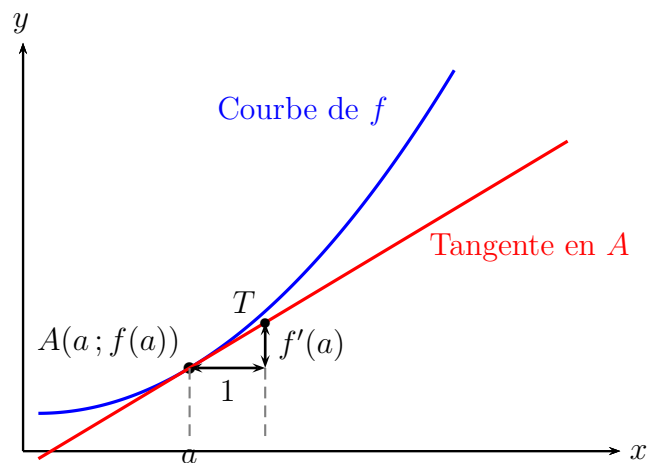
Lorsque la limite précédente existe et est finie, on dit que f est dérivable en a . Cette limite est appelée le **nombre dérivé de f en a** .

On le note

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Le nombre dérivé $f'(a)$ représente le taux de variation instantané de la fonction au point d'abscisse a .

On peut l'interpréter comme la variation de f pour une unité d'augmentation de l'abscisse, au voisinage de a . Il s'agit d'une interprétation locale : la variation n'est généralement pas constante sur tout un intervalle.



Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2.$$

Calculons le nombre dérivé en a .

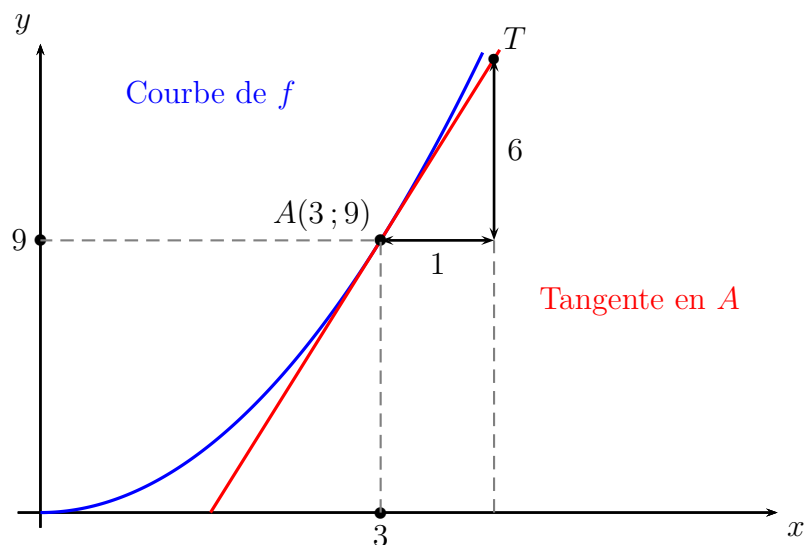
Pour $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= 2a + h.\end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, $2a + h$ tend vers $2a$. Ainsi,

$$\boxed{f'(a) = 2a}.$$

En particulier, $f'(3) = 6$. Au voisinage de $x = 3$, une augmentation de l'abscisse de 1 unité correspond donc approximativement à une augmentation de 6 unités de l'image.



1.4 Équation de la tangente

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a passe par $A(a; f(a))$ et possède pour coefficient directeur $f'(a)$.

L'équation d'une droite de coefficient directeur m passant par un point $(x_A; y_A)$ est

$$y - y_A = m(x - x_A).$$

On en déduit l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a :

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}.$$

Cette équation permet d'approcher $f(x)$, lorsque x est proche de a , par

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)}.$$

Cette approximation est appelée approximation affine au voisinage de a .

Exemple Pour $f(x) = x^2$, on a $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$.
L'équation de la tangente au point d'abscisse 3 est donc

$$y = 6(x - 3) + 9,$$

soit

$$\boxed{y = 6x - 9}.$$

Pour calculer $3,01^2$, on peut utiliser cette tangente :

$$3,01^2 \approx 6 \times 3,01 - 9 = 9,06.$$

La valeur exacte est 9,0601. L'approximation est donc très précise.

2 Fonction dérivée

2.1 Des nombres dérivés aux fonctions dérivées

Pour une fonction donnée, on peut calculer le nombre dérivé en différents points. Lorsque la fonction est dérivable sur un intervalle, on peut ainsi associer à chaque nombre x de cet intervalle le nombre dérivé $f'(x)$.

On définit alors une nouvelle fonction, appelée **fonction dérivée** de f , et notée f' .

Elle vérifie

$$\boxed{x \longmapsto f'(x)}.$$

Par exemple, pour $f(x) = x^2$, le calcul précédent a montré que, pour tout réel a ,

$$f'(a) = 2a.$$

La fonction dérivée de f est donc

$$\boxed{f'(x) = 2x}.$$

Il faut distinguer les deux notations :

- $f'(a)$ est un nombre : le nombre dérivé en un point précis ;
- f' est une fonction : elle donne le nombre dérivé en chaque point où f est dérivable.

2.2 Dérivées des fonctions usuelles

Pour éviter de recommencer à chaque fois le calcul d'une limite, on établit les dérivées des fonctions usuelles.

Sur les intervalles où elles sont définies et dérivables, on dispose notamment des résultats suivants :

Fonction f	Fonction dérivée f'	Remarque
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	pour k constante réelle
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	pour a, b constantes réelles
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	pour $n \in \mathbb{N}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	pour $x \neq 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	pour $x > 0$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	

Dans la première ligne, k est une constante réelle. La dérivée de la fonction constante est nulle, car sa valeur ne varie pas.

La formule pour $f(x) = \sqrt{x}$ est valable pour $x > 0$. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Ces résultats permettent de déterminer rapidement les fonctions dérivées et donc les équations des tangentes, sans avoir à calculer systématiquement des limites.

2.3 Dérivées et opérations

Pour dériver une fonction, on utilise des règles qui dépendent de la façon dont elle est construite. Le tableau suivant présente les principales règles de dérivation, accompagnées d'exemples pour apprendre à les appliquer.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Exemple
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$	$(x^2 + 3x + 1)' = 2x + 3$
$f(x) = u(x) - v(x)$	$f'(x) = u'(x) - v'(x)$	$(x^2 - x)' = 2x - 1$
$f(x) = ku(x)$	$f'(x) = ku'(x)$	$(3x^2)' = 6x$
$f(x) = u(x)v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$(x^2e^x)' = (2x + x^2)e^x$
$f(x) = \frac{1}{u(x)}$	$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)' = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$	$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$
$f(x) = u(x)^2$	$f'(x) = 2u'(x)u(x)$	$((x^3 + 1)^2)' = 2(x^3 + 1) \times 3x^2$
$f(x) = u(x)^n$	$f'(x) = n u'(x) u(x)^{n-1}$	$((x + 3)^{12})' = 12(x + 3)^{11} \times 1$

Pour les quotients, on suppose que le dénominateur ne s'annule pas ; pour u^n , n est un entier naturel non nul.

3 Variation d'une fonction

La dérivée d'une fonction permet de déterminer ses variations, c'est-à-dire les intervalles sur lesquels elle est croissante ou décroissante.

3.1 Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est constante sur I .

3.2 Méthode

Pour étudier les variations d'une fonction f :

1. Calculer sa dérivée f' .
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f .

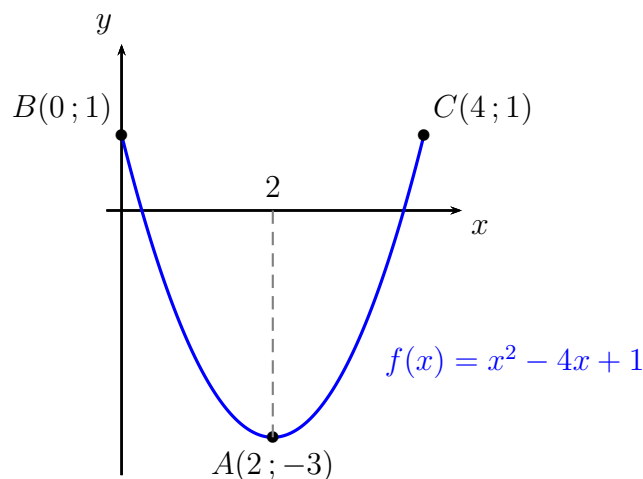
3.3 Exemple

On considère la fonction f définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Sa dérivée est $f'(x) = 2x - 4$

$$\text{On a : } \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } x < 2, \\ f'(2) = 0, \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

La fonction f est donc décroissante sur $[0; 2]$, puis croissante sur $[2; 4]$.

x	0	2	4
$f'(x)$		— 0 —	
$f(x)$	1	— -3 —	1



4 Recherche d'extrema

Une fonction peut atteindre une valeur maximale ou une valeur minimale sur un intervalle. Ces valeurs sont appelées des **extrema**.

4.1 Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , et soit a un point intérieur à I .

- Si f' passe du signe positif au signe négatif en a , alors $f(a)$ est un maximum local de f .
- Si f' passe du signe négatif au signe positif en a , alors $f(a)$ est un minimum local de f .

Attention : si $f'(a) = 0$, la fonction n'admet pas nécessairement un extremum en a . Il faut étudier le signe de la dérivée de part et d'autre de a .

4.2 Exemple

On considère la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Sa dérivée est

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

La dérivée est positive sur $[-2; -1]$, négative sur $[-1; 1]$, puis positive sur $[1; 2]$.

La fonction f est donc croissante, puis décroissante, puis croissante.

Elle admet un maximum local en $x = -1$ et un minimum local en $x = 1$.

On a :

$$f(-1) = 2 \quad \text{et} \quad f(1) = -2.$$

