

Objectifs :

- Savoir calculer avec des fractions, des puissances et des racines carrées.
- Savoir développer, factoriser et résoudre des équations et des inéquations simples.
- Savoir lire et utiliser une fonction (image, antécédent, ensemble de définition).
- Savoir déterminer l'équation d'une droite et le signe d'une expression.
- Savoir dresser un tableau de signes et un tableau de variation.
- Savoir dériver des fonctions simples.

Dans les exercices, le nombre d'étoiles indique le niveau : ★ très simple, ★★ intermédiaire, ★★★ niveau attendu pour suivre le chapitre sur la dérivation, la continuité et la convexité.

1 Fractions, puissances et racines carrées

1.1 Les fractions

Propriété 1. Calculs avec des fractions

Soient a, b, c, d des nombres réels, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

- **Addition** : on met au même dénominateur : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.
- **Multiplication** : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
- **Division** : diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse (avec $c \neq 0$) :
 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.
- **Simplification** : $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ (avec $k \neq 0$).

Exemples :

- $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$
- $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$
- $\frac{3}{4} \div \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Exercice 1 Calculer et donner le résultat sous forme de fraction simplifiée.

a) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$

★

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

★

c) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$	**	f) $2 - \frac{3}{5}$	**
d) $\frac{2}{3} \times \frac{9}{4}$	*	g) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{2}}$	***
e) $\frac{5}{6} \div \frac{10}{3}$	**	h) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$	***

1.2 Les puissances

Propriété 2. Règles de calcul sur les puissances

Soient a un réel non nul, m et n des entiers relatifs.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$

Exemples :

- $2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$
- $\frac{5^6}{5^4} = 5^2 = 25$
- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $(x^2)^3 = x^6$

Exercice 2 Écrire sous la forme a^n ou calculer.

a) 5^2 et 2^5	*	e) $(2^3)^2$	**
b) $(-3)^2$ et -3^2	**	f) 2^{-3}	**
c) $3^2 \times 3^5$	*	g) $x^4 \times x^{-6}$	***
d) $\frac{7^5}{7^2}$	*	h) $\frac{(x^3)^2 \times x}{x^4}$	***

1.3 Les racines carrées

Propriété 3. Racine carrée

Soit a un réel positif. La racine carrée de a , notée $\sqrt{a}$, est le **nombre positif** dont le carré vaut a .

- $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$.
- Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Pour $a \geq 0$ et $b > 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- **Attention** : en général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple, $\sqrt{9+16} = 5$ mais $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.
- $\sqrt{a}$ n'existe pas si $a < 0$.

Exemples :

- $\sqrt{49} = 7$ et $(\sqrt{5})^2 = 5$.
- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$.
- $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

Exercice 3

a) Calculer $\sqrt{25}$, $\sqrt{100}$ et $\sqrt{0,01}$.

★

b) Calculer $(\sqrt{7})^2$.

★

c) Écrire $\sqrt{18}$ sous la forme $a\sqrt{2}$.

★★

d) Écrire $\sqrt{50} + \sqrt{8}$ sous la forme $a\sqrt{2}$. ★★★

e) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$

★★

f) Pour quelles valeurs de x le nombre $\sqrt{x-3}$ existe-t-il ? ★★★

2 Calcul littéral

2.1 Développer

Propriété 4. Développement et identités remarquables

Soient a, b, c, d, k des réels.

- **Distributivité simple** : $k(a+b) = ka + kb$.
- **Distributivité double** : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exemples :

- $3(2x - 5) = 6x - 15$
- $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$
- $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$
- $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$

Attention aux signes : $-(a - b) = -a + b$ et $(-3)^2 = 9$.

Exercice 4 Développer et réduire.

a) $4(x + 3)$	★	f) $(x + 3)^2$	★★
b) $-2(3x - 1)$	★	g) $(3x - 2)^2$	★★
c) $x(x + 5)$	★	h) $(x - 5)(x + 5)$	★★
d) $(x + 1)(x + 4)$	★★	i) $(x^2 + x)(5x - 1)$	★★★
e) $(2x - 1)(x + 3)$	★★	j) $(2x - 1)^2 - (x + 3)(x - 3)$	★★★

2.2 Factoriser

Propriété 5. Factorisation

Factoriser, c'est transformer une **somme** en un **produit**.

- **Facteur commun :** $ka + kb = k(a + b)$.
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exemples :

- $6x + 9 = 3 \times 2x + 3 \times 3 = 3(2x + 3)$
- $x^2 - 5x = x(x - 5)$
- $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$
- $(x - 1)(2x + 3) - (x - 1)(x + 5) = (x - 1)[(2x + 3) - (x + 5)] = (x - 1)(x - 2)$

Exercice 5 Factoriser.

a) $5x + 10$	★	e) $x^2 + 6x + 9$	★★
b) $x^2 + 3x$	★	f) $4x^2 - 1$	★★
c) $3x^2 - 6x$	★★	g) $(x + 2)(3x - 1) + (x + 2)(x + 4)$	★★★
d) $x^2 - 16$	★★	h) $(2x - 1)^2 - 9$	★★★

3 Équations et inéquations

3.1 Équations du premier degré et équations produit

Propriété 6. Résolution d'équations

- On ne change pas les solutions d'une équation en ajoutant, soustrayant, multipliant ou divisant les deux membres par un même nombre **non nul**.
- **Équation produit** : un produit de facteurs est nul si, et seulement si, **l'un au moins** des facteurs est nul : $A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$.
- **Équation** $x^2 = k$: si $k > 0$, deux solutions $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$; si $k = 0$, une solution 0 ; si $k < 0$, aucune solution.

Exemples :

- $3x - 7 = 5 \iff 3x = 12 \iff x = 4$.
- $(x - 2)(3x + 1) = 0 \iff x - 2 = 0 \text{ ou } 3x + 1 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$.
- $x^2 = 25 \iff x = 5 \text{ ou } x = -5$.

3.2 Inéquations du premier degré

Propriété 7. Résolution d'inéquations

- On peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inéquation.
- Si on multiplie (ou divise) les deux membres par un nombre **positif**, le sens de l'inégalité **ne change pas**.
- Si on multiplie (ou divise) les deux membres par un nombre **négatif**, le sens de l'inégalité **change**.

Exemples :

- $2x + 1 \geq 7 \iff 2x \geq 6 \iff x \geq 3$. L'ensemble des solutions est $[3; +\infty[$.
- $-3x + 5 > 11 \iff -3x > 6 \iff x < -2$ (on divise par -3 , donc le sens change). L'ensemble des solutions est $] -\infty; -2[$.

3.3 Intervalles

Rappel : notation des intervalles

- $x \in [2; 5]$ signifie $2 \leq x \leq 5$ (bornes **incluses**).
- $x \in]2; 5[$ signifie $2 < x < 5$ (bornes **exclues**).
- $x \in [3; +\infty[$ signifie $x \geq 3$ et $x \in]-\infty; 1[$ signifie $x < 1$.
- Les crochets sont **toujours** ouverts en $+\infty$ et en $-\infty$.
- $\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des réels privés de 0.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $x + 5 = 12$	★	f) $(x - 3)(x + 4) = 0$	★★
b) $4x = 20$	★	g) $2x + 3 \leq 9$	★★
c) $3x - 1 = 8$	★	h) $-4x + 1 > 9$	★★
d) $5 - 2x = 11$	★★	i) $x^2 - 5x = 0$	★★★
e) $x^2 = 49$	★★	j) $3(x - 2) > 5x + 4$	★★★

Exercice 7 Écrire chaque ensemble sous forme d'intervalle, ou chaque intervalle sous forme d'inégalité.

a) $x \geq 4$	★	d) $x \in [-2; +\infty[$	★
b) $-1 < x \leq 3$	★	e) $x \in]-3; 1[$	★
c) $x < 0$	★	f) $x \in]-\infty; 5]$	★

4 Notion de fonction

4.1 Vocabulaire

Définition 1. Fonction, image, antécédent

Une **fonction** f associe à chaque nombre x d'un ensemble $\mathcal{D}_f$ (appelé **ensemble de définition**) un **unique** nombre noté $f(x)$.

- $f(x)$ est **l'image** de x par f .
- Si $f(a) = b$, alors a est **un antécédent** de b par f .
- Pour **calculer l'image** de a , on remplace x par a dans l'expression de $f(x)$.
- Pour **trouver les antécédents** de b , on résout l'équation $f(x) = b$.
- Sur la courbe représentative $\mathcal{C}_f$, le point $M(a; b)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si, et seulement si, $b = f(a)$.

Exemple : soit $f(x) = 2x^2 - 3$.

- L'image de 3 est $f(3) = 2 \times 3^2 - 3 = 15$.
- Les antécédents de 5 vérifient $2x^2 - 3 = 5 \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$.

4.2 Ensemble de définition

Propriété 8. Valeurs interdites

- On **ne peut pas diviser par 0** : pour $\frac{1}{g(x)}$, on exclut les valeurs de x telles que $g(x) = 0$.
- On **ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif** : pour $\sqrt{g(x)}$, il faut $g(x) \geq 0$.

Exemples :

- $f(x) = \frac{1}{x-3}$: on doit avoir $x-3 \neq 0$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$.
- $g(x) = \sqrt{2x+4}$: on doit avoir $2x+4 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -2$, donc $\mathcal{D}_g = [-2; +\infty[$.

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$.

- Calculer l'image de 0, de 4 et de -1 . ★
- Déterminer l'antécédent de 10. ★★
- Le point $A(2; 5)$ appartient-il à la courbe de f ? ★★

Exercice 9 Soit $g(x) = x^2 - 4x$ définie sur $\mathbb{R}$.

- a) Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(-2)$. ★
- b) Déterminer les antécédents de 0 (indication : factoriser $g(x)$). ★★★
- c) Déterminer les antécédents de -3 . ★★★

Exercice 10 Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction.

- | | | | |
|---------------------------|----|----------------------------|-----|
| a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ | ★ | d) $k(x) = \sqrt{x-1}$ | ★★ |
| b) $g(x) = \frac{4}{x}$ | ★ | e) $m(x) = \frac{1}{2x-6}$ | ★★ |
| c) $h(x) = \frac{3}{x+2}$ | ★★ | f) $n(x) = \sqrt{3x+6}$ | ★★★ |

5 Droites et fonctions affines

Propriété 9. Fonction affine et équation d'une droite

- Une fonction affine s'écrit $f(x) = mx + p$. Sa courbe est une **droite**.
- m est le **coefficient directeur** (la « pente ») et p l'**ordonnée à l'origine**.
- Si $m > 0$, la fonction est croissante ; si $m < 0$, elle est décroissante ; si $m = 0$, elle est constante.
- Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de la droite avec $x_A \neq x_B$, alors

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

- La droite de coefficient directeur m passant par $A(x_A; y_A)$ a pour équation

$$y = m(x - x_A) + y_A.$$

Exemple : déterminer l'équation de la droite (AB) avec $A(1; 2)$ et $B(3; 8)$.

$$m = \frac{8-2}{3-1} = \frac{6}{2} = 3, \text{ puis } y = 3(x-1) + 2 = 3x - 3 + 2, \text{ d'où } y = 3x - 1.$$

Exercice 11

- a) Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $y = -2x + 5$. ★
- b) Calculer le coefficient directeur de la droite passant par $A(0; 1)$ et $B(2; 7)$. ★★
- c) Déterminer l'équation de la droite de coefficient directeur 4 passant par $A(1; 3)$. ★★
- d) Déterminer l'équation de la droite passant par $A(-1; 2)$ et $B(2; -4)$. ★★★
- e) Déterminer l'équation de la droite de coefficient directeur -2 passant par $A(-1; 1)$. ★★★

6 Signe d'une expression et tableau de signes

6.1 Signe de $ax + b$

Propriété 10. Signe d'une expression affine

Soit $a \neq 0$. L'expression $ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$.

- Si $a > 0$: $ax + b$ est négative avant $-\frac{b}{a}$, puis positive après.
- Si $a < 0$: $ax + b$ est positive avant $-\frac{b}{a}$, puis négative après.

Règle : le signe de $ax + b$ est celui de a « à droite » de la racine.

Exemples :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x - 6$		-	0	+	
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-3x + 6$		+	0	-	

6.2 Signe d'un produit et d'un quotient

Propriété 11. Règle des signes

- Un produit (ou un quotient) de deux nombres de **même signe** est **positif** ; de **signes contraires**, il est **négatif**.
- Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient, on dresse un **tableau de signes** : une ligne par facteur, une ligne pour le résultat.
- Dans un quotient, la valeur qui annule le dénominateur est interdite : on la marque par une **double barre**.

Exemple : signe de $(x - 2)(3x + 1)$. Les facteurs s'annulent en 2 et en $-\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$x - 2$		-		-	0	+	
$3x + 1$		-	0	+		+	
$(x - 2)(3x + 1)$		+	0	-	0	+	

6.3 Signe d'un trinôme du second degré

Propriété 12. Signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$: pas de racine ; le trinôme a le signe de a pour tout x .
- Si $\Delta = 0$: une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$; le trinôme a le signe de a (et s'annule en x_0).
- Si $\Delta > 0$: deux racines $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; le trinôme a le signe de a à l'extérieur des racines, et le signe contraire de a entre les racines.

Exemple : signe de $x^2 - 3x + 2$. On a $\Delta = 9 - 8 = 1$, donc $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$.
Comme $a = 1 > 0$:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+

Exercice 12 Dresser le tableau de signes de chaque expression.

a) $2x - 4$	★	e) $\frac{x+2}{x-4}$	★★★
b) $-x + 5$	★	f) $x^2 - 4$	★★★
c) $(x-1)(x+3)$	★★	g) $x^2 - 5x + 6$	★★★
d) $x(2x-6)$	★★	h) $3x(x-2)$	★★★

7 La fonction exponentielle

Propriété 13. Propriétés de la fonction exponentielle

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2,718$.
- Pour tout réel x , $e^x > 0$: l'exponentielle est **toujours strictement positive**.
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ $(e^a)^n = e^{na}$
- La fonction exponentielle est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- **Conséquence importante** : le signe de $A(x) \times e^x$ est celui de $A(x)$, car $e^x > 0$.

Exemples :

• $e^3 \times e^2 = e^5$ et $\frac{e^5}{e^2} = e^3$.

- $e^{2x+1} = e^{2x} \times e^1$.
- Le signe de $(2x - 1)e^x$ est celui de $2x - 1$: il est négatif pour $x < \frac{1}{2}$ et positif pour $x > \frac{1}{2}$.

Exercice 13

- | | | | |
|-------------------------------------|----|---|-----|
| a) Calculer e^0 . | ★ | e) Écrire e^{x+2} sous la forme $k e^x$. | ★★ |
| b) Simplifier $e^4 \times e^3$. | ★ | f) Simplifier $(e^x)^2$. | ★★ |
| c) Simplifier $\frac{e^6}{e^2}$. | ★ | g) Donner le signe de $(x - 3)e^x$. | ★★★ |
| d) Simplifier $e^{-2} \times e^5$. | ★★ | h) Donner le signe de $(x^2 - 1)e^x$. | ★★★ |

8 Variations, nombre dérivé et dérivation

8.1 Lire un tableau de variation

Propriété 14. Tableau de variation

- Une flèche qui **monte** signifie que la fonction est **croissante** ; une flèche qui **descend** signifie qu'elle est **décroissante**.
- Un **maximum** (ou un **minimum**) se lit à l'endroit où les flèches changent de sens.
- Pour comparer deux images, on regarde si la fonction est croissante ou décroissante sur l'intervalle concerné.

Exemple : voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f	$-\infty$	4	-2	$+\infty$

- f est croissante sur $] -\infty ; -1]$ et sur $[3 ; +\infty[$, décroissante sur $[-1 ; 3]$.
- f admet un maximum local égal à 4 en $x = -1$ et un minimum local égal à -2 en $x = 3$.

Exercice 14 D'après le tableau de variation de l'exemple ci-dessus :

- | | |
|--|-----|
| a) Quelle est l'image de 3 ? | ★ |
| b) Sur quel intervalle f est-elle décroissante ? | ★ |
| c) Comparer $f(0)$ et $f(2)$. Justifier. | ★★ |
| d) Comparer $f(4)$ et $f(5)$. Justifier. | ★★ |
| e) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ semble-t-elle avoir ? Justifier. | ★★★ |

8.2 Nombre dérivé et tangente

Propriété 15. Rappel sur le nombre dérivé

- Le **nombre dérivé** $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a .
- La tangente en $A(a; f(a))$ a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Si $f'(a) > 0$, la courbe « monte » au point d'abscisse a ; si $f'(a) < 0$, elle « descend »; si $f'(a) = 0$, la tangente est horizontale.

8.3 Dérivées usuelles

Rappel : dérivées à connaître

$f(x)$	k	$mx + p$	x^2	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	e^x
$f'(x)$	0	m	$2x$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x

- $(ku)' = ku'$ et $(u + v)' = u' + v'$.
- $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemples :

- $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$: $f'(x) = 3 \times 2x - 5 = 6x - 5$.
- $g(x) = x^3 + 4x$: $g'(x) = 3x^2 + 4$.
- $h(x) = 2x e^x$: on pose $u = 2x$ et $v = e^x$, donc $u' = 2$ et $v' = e^x$, d'où $h'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2(1 + x)e^x$.

Exercice 15 Dériver les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 4x + 7$	★	f) $f(x) = x^4 - x^2$	★★
b) $f(x) = x^2 + 3x$	★	g) $f(x) = 3x + 2e^x$	★★
c) $f(x) = 5x^3$	★	h) $f(x) = xe^x$	★★★
d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$	★★	i) $f(x) = (x + 1)(x - 3)$	★★★
e) $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$	★★	j) $f(x) = (2x - 1)e^x$	★★★

8.4 Dérivée, signe et variations

Méthode : étudier les variations d'une fonction

1. On **calcule** $f'(x)$.
2. On **factorise** $f'(x)$ si c'est possible (pour pouvoir étudier son signe).
3. On **étudie le signe** de $f'(x)$ avec un tableau de signes.
4. On en **déduit les variations** de f : $f'(x) \geq 0$ donc f croissante ; $f'(x) \leq 0$ donc f décroissante.
5. On **dresse le tableau de variation** en calculant les images utiles.

Exemple : étudier les variations de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
2. $f'(x) = 3x(x - 2)$.
3. Le signe de $f'(x)$ est donné par le tableau de signes ci-dessous.
4. f est croissante sur $] -\infty ; 0]$, décroissante sur $[0 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$.
5. $f(0) = 2$ et $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$3x$	-	0	+	+
$x - 2$	-	0	-	+
$f'(x)$	+	0	-	+
f	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Exercice 16 Étudier les variations de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

- a) $f(x) = 2x - 6$ ★
- b) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ★★
- c) $f(x) = x^3 - 12x$ ★★★
- d) $f(x) = (x - 1)e^x$ ★★★

9 Exercices de synthèse

Exercice 17 ★★★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$.
2. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Exercice 18 ★★★ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)e^x$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $f'(x) = (x + 3)e^x$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ (on rappelle que $e^x > 0$ pour tout réel x).
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 19 ★★★ Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. En déduire que, pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.