

**EXERCICE 1** Calculer les transformées.

$$f_1(t) = (2t - 1)U(t)$$

$$f_2(t) = e^{-5t}U(t)$$

$$f_3(t) = \cos(3t)U(t)$$

$$f_4(t) = \sin(5t)U(t)$$

$$f_5(t) = e^{2t}U(t)$$

$$f_6(t) = te^{-5t}U(t)$$

$$f_7(t) = e^{-t} \cos(3t)U(t)$$

$$f_8(t) = e^{-t} \sin(5t)U(t)$$

$$f_9(t) = U(t - 1)$$

$$f_{10}(t) = (t - 1)U(t - 1)$$

$$f_{11}(t) = \cos(3t - \pi)U(t - \pi)$$

$$f_{12}(t) = \sin(t)U(t - \frac{\pi}{3})$$

**EXERCICE 2** Décomposer en éléments simples.

$$A = \frac{1}{(p+1)(p-2)}$$

$$B = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)}$$

$$C = \frac{p+1}{p(p^2+1)}$$

$$D = \frac{1}{(p^2+1)(p-2)}$$

$$E = \frac{1}{(p+1)(p^2-4)}$$

$$F = \frac{1}{(p-3)(p^2+4)}$$

$$G = \frac{1}{p(p^2+2)}$$

$$H = \frac{p^3}{(p+1)(p-2)}$$

**EXERCICE 3** Retrouver des originaux.

$$F_1(p) = \frac{2}{p+5}$$

$$F_2(p) = \frac{1}{p^2+9}$$

$$F_3(p) = \frac{p+1}{p^2+4}$$

$$F_4(p) = \frac{1}{p(p+2)}$$

$$F_5(p) = \frac{e^{-p}}{p^2}$$

$$F_6(p) = \frac{1}{p^2}(1-p)e^{-2p}$$

$$F_7(p) = e^{-p\frac{\pi}{2}} \frac{p}{p^2+4}$$

$$F_8(p) = \frac{e^{-3p}}{p(p+1)}$$

$$F_9(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$F_{10}(p) = \frac{1}{(p+2)^2}$$

$$F_{11}(p) = \frac{1}{(p+1)^2+1}$$

$$F_{12}(p) = \frac{e^{-p}}{(p+1)^2+4}$$

**EXERCICE 4** Résoudre des équations différentielles d'ordre 1.

$$(E_1) \quad y' + y = U(t) \text{ et } y(0) = 1$$

$$(E_2) \quad y' + 2y = tU(t) \text{ et } y(0) = 1$$

$$(E_3) \quad y' + 3y = e^{-3t}U(t) \text{ et } y(0) = 1$$

$$(E_4) \quad y' + y = \sin(3t)U(t) \text{ et } y(0) = 1$$

**EXERCICE 5** Résoudre des équations différentielles d'ordre 2.

$$(E_1) \quad y'' + 3y' + 2y = U(t) \text{ et } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0 \quad (E_2) \quad y'' + 4y = tU(t) \text{ et } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0$$

**EXERCICE 6** Résoudre un système différentiel.

$$\text{Résoudre } \begin{cases} x' = 2x + 3y & x(0) = 1 \\ y' = -3x + 2y & y(0) = 0 \end{cases}$$

### EXERCICE 7 Un problème de BTS.

Dans ce problème, on s'intéresse à un filtre modélisé mathématiquement par l'équation différentielle suivante :

$$s'(t) + s(t) = e(t) \quad s(0) = 0$$

La fonction  $e$  représente l'entrée aux bornes du filtre et la fonction  $s$  la sortie.

On admet que les fonctions  $e$  et  $s$  admettent des transformées de Laplace respectivement notées  $E$  et  $S$ .

La fonction de transfert  $H$  du filtre est définie par :

$$S(p) = H(p) \times E(p)$$

On rappelle que la fonction échelon unité, notée  $U$ , est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que :  $H(p) = \frac{1}{p+1}$ .
2. La fonction  $e$  est définie par :  $e(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1)$ .
  - a. Représenter graphiquement la fonction  $e$ .
  - b. Montrer que :  $E(p) = \frac{1}{p^2} (1 - e^{-p})$ .
  - c. En déduire  $S(p)$ .
  - d. Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p+1}$
  - e. En déduire l'original  $s$  de  $S$ .
  - f. Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = t - 1 + e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ s(t) = 1 + (1 - e)e^{-t} & \text{si } 1 \leq t \end{cases}$$

3.
  - a. Comparer  $s(1^-)$  et  $s(1^+)$ .
  - b. Calculer  $s'(t)$  et étudier son signe sur les intervalles  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$ .
  - c. En déduire le sens de variation de la fonction  $s$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - d. Déterminer la limite de la fonction  $s$  en  $+\infty$ .