

10pts **CORRIGÉ 1**

2pts 1. $\frac{y(n) - y(n-1)}{\frac{1}{100}} - 3y(n) = ne(n)$

donc $100(y(n) - y(n-1)) - 3y(n) = ne(n)$

donc $100y(n) - 100y(n-1) - 3y(n) = ne(n)$

donc $97y(n) - 100y(n-1) = ne(n)$

donc $97y(n) = 100y(n-1) + ne(n)$

donc $y(n) = \frac{100}{97}y(n-1) + \frac{ne(n)}{97}$

1.5pts 2. $y(-1) = 0$ car y est causale, $y(0) = 0 + 0 = 0$ puis $y(1) = \frac{1}{97} \approx 0,0103$

et enfin $y(2) = \frac{100}{97} \times \frac{1}{97} + \frac{2}{97} = \frac{294}{9409} \approx 0,0312$

1.5pts 3. La transformée en z donne alors :

$F(z) = \frac{100}{97}z^{-1} \times F(z) + \frac{1}{97} \frac{z}{(z-1)^2}$

puis $z \times F(z) = \frac{100}{97}F(z) + \frac{1}{97} \frac{z^2}{(z-1)^2}$

donc $\left(z - \frac{100}{97}\right) \times F(z) = \frac{1}{97} \frac{z^2}{(z-1)^2}$

donc $F(z) = \frac{1}{97} \frac{z^2}{(z-1)^2 \left(z - \frac{100}{97}\right)}$

2.5pts 4. Décomposons en éléments simples $G(z) = \frac{1}{97} \frac{z}{(z-1)^2 \left(z - \frac{100}{97}\right)}$

on a : $G(z) = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z - \frac{100}{97}}$

$A = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{z - \frac{100}{97}} = \frac{1}{97} \frac{-97}{3} = -\frac{1}{3}$

$C = \lim_{z \rightarrow \frac{100}{97}} \left(z - \frac{100}{97}\right) G(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{100}{97}} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{97} \frac{9700}{9} = \frac{100}{9}$

donc $\lim_{z \rightarrow +\infty} (z-1)G(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z}{(z-1) \left(z - \frac{100}{97}\right)} = 0 = 0 + B + C$ donc $C = -B = \frac{-100}{9}$

on a : $G(z) = \frac{\frac{-1}{3}}{(z-1)^2} + \frac{\frac{-100}{9}}{z-1} + \frac{\frac{100}{9}}{z - \frac{100}{97}}$

$G(z) = \frac{-1}{3} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{100}{9} \frac{1}{z-1} + \frac{100}{9} \frac{1}{z - \frac{100}{97}}$

1pt 5. On a : $F(z) = z \times G(z)$

donc $F(z) = \frac{-1}{3} \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{100}{9} \frac{z}{z-1} + \frac{100}{9} \frac{z}{z - \frac{100}{97}}$

- 1.5pts 6. On peut alors utiliser la table des transformées usuelles pour retrouver les originaux :

$$y(n) = \frac{-1}{3}ne(n) - \frac{100}{9}e(n) + \frac{100}{9} \left(\frac{100}{97}\right)^n e(n)$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $y(n) = \frac{-n}{3} - \frac{100}{9} + \frac{100}{9} \left(\frac{100}{97}\right)^n$

- 10pts **CORRIGÉ 2** Soit (y_n) une suite causale définie sur $\mathbb{Z}$ par l'équation

$$(E) : y(n) = \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{2}{9}y(n-2) + d_0(n)$$

- 2pts 1. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de $y(n)$ pour chaque n compris entre 0 et 3.
Quelle semble être la limite de $y(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

$$y(0) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{9} \times 0 + d_0(0) = 1 \text{ car } y \text{ est causale donc nulle pour les négatifs}$$

$$y(1) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{9} \times 0 + d_0(1) = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

$$y(2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \times 1 + d_0(1) = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

$$y(3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} + d_0(1) = \frac{5}{27} \approx 0,136$$

- 1pt 2. Écrire la transformée en Z l'équation (E) , on notera Y la transformée de y

Transformons en Z , on obtient : $Y(z) = \frac{1}{3}z^{-1}Y(z) + \frac{2}{9}z^{-2}Y(z) + 1$

- 2pts 3. Montrer que $Y(z)$ peut s'écrire $Y(z) = \frac{9z^2}{(3z-2)(3z+1)}$

Multiplions par z^2 cela donne : $z^2Y(z) = \frac{1}{3}zY(z) + \frac{2}{9}Y(z) + z^2$

Rassemblons les $F(z)$ cela donne : $Y(z) \left(z^2 - \frac{1}{3}z - \frac{2}{9} \right) = z^2$

Factorisons : $z^2 - \frac{1}{3}z - \frac{2}{9}$, on a : $\Delta = 1$ donc les racines sont $z = -\frac{1}{3}$ et $z = \frac{2}{3}$

On a alors : $z^2 - \frac{1}{3}z - \frac{2}{9} = (z + \frac{1}{3})(z - \frac{2}{3})$

donc : $Y(z) \left((z + \frac{1}{3})(z - \frac{2}{3}) \right) = z^2$

donc $Y(z) = \frac{z^2}{(z + \frac{1}{3})(z - \frac{2}{3})}$

Et finalement : $Y(z) = \frac{9z^2}{(3z-2)(3z+1)}$ en multipliant par 9 le numérateur et le dénominateur

- 2pts 4. On écrit $G(z) = \frac{F(z)}{z}$, décomposer $G(z)$ en éléments simples.

$$G(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{9z}{(3z-2)(3z+1)} = \frac{A}{3z-2} + \frac{B}{3z+1}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow \frac{2}{3}} (3z-2)Y(z) = 2$$

$$B = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}} (3z + 1)Y(z) = 1$$

$$\text{donc } G(z) = \frac{2}{3z - 2} + \frac{1}{3z + 1}$$

- 2pts 5. En déduire l'expression de $y(n)$ en fonction de n

$$Y(z) = z \times G(z) = \frac{2z}{3z - 2} + \frac{z}{3z + 1}$$

Divisons le numérateur et le dénominateur de chaque fraction par 3

$$Y(z) = \frac{\frac{2}{3}z}{z - \frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{3}z}{z - (-\frac{1}{3})}$$

$$Y(z) = \frac{2}{3} \times \frac{z}{z - \frac{2}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{z}{z - (-\frac{1}{3})}$$

$$\text{donc } y(n) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n e(n) + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n e(n)$$

$$\text{Et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } y(n) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

- 1pts 6. Vérifier ce résultat en retrouvant les valeurs obtenues en 1)
puis calculer la limite de $y(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$

$$\text{Pour } n = 0, \text{ on obtient : } y(0) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{Pour } n = 1, \text{ on obtient : } y(1) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Pour } n = 2, \text{ on obtient : } y(2) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Pour } n = 3, \text{ on obtient : } y(3) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{15}{81} = \frac{5}{27}$$