

Rappels : L'échelon unité est défini sur $\mathbb{Z}$ par $e(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$

La suite d_0 est définie sur $\mathbb{Z}$ par $d_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$

Une fonction est causale si elle est nulle sur $] -\infty; 0[$

EXERCICE 1 On considère l'équation différentielle $y' - 3y = t$ et $y(0) = 0$

On décide de discrétiser cette équation par : $\frac{y(n) - y(n-1)}{T_e} - 3y(n) = ne(n)$ avec un $T_e = 0,01s$.

1. Ecrire $y(n)$ en fonction de $y(n-1)$.
2. Calculer $y(n)$ pour $n = -1, 0, 1, 2$ sachant que y est causale.
3. Transformer en Z l'équation obtenue.
4. Sachant que la décomposition en éléments simples de $G(z) = \frac{F(z)}{z}$ est :

$G(z) = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z - \frac{100}{97}}$ déterminer les valeurs des constantes réelles A, B et C .

5. Que devient l'expression de $F(z)$?
6. Retrouver son originale $y(n)$.

EXERCICE 2 Soit (y_n) une suite causale définie sur $\mathbb{Z}$ par l'équation

$$(E) : y(n) = \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{2}{9}y(n-2) + d_0(n)$$

1. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de $y(n)$ pour chaque n compris entre 0 et 3.
Quelle semble être la limite de $y(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Écrire la transformée en Z l'équation (E) , on notera Y la transformée de y
3. Montrer que $Y(z)$ peut s'écrire $Y(z) = \frac{9z^2}{(3z-2)(3z+1)}$
4. On écrit $G(z) = \frac{F(z)}{z}$, décomposer $G(z)$ en éléments simples.
5. En déduire l'expression de $y(n)$ en fonction de n
6. Vérifier ce résultat en retrouvant les valeurs obtenues en 1)
puis calculer la limite de $y(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$