

EXERCICE 1 On rappelle que la fonction échelon unité U est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $] -\infty ; 0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t) = 4[U(t) - U(t - 2)]$$

- (a) Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthonormal.
 (b) On note E la transformée de Laplace de la fonction e .
 Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction s telle que

$$4s'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0) = 0$$

On admet que la fonction s admet une transformée de Laplace, notée S .
 Démontrer que :

$$S(p) = \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{4} \right)} (1 - e^{-2p})$$

3. Déterminer les réels A et B tels que :

$$\frac{1}{p \left(p + \frac{1}{4} \right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{4}}$$

4. Recopier et compléter le tableau ci-dessous dans lequel f représente la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p} \times e^{-2p}$	$\frac{1}{p + \frac{1}{4}}$	$\frac{1}{p + \frac{1}{4}} \times e^{-2p}$
$f(t)$				

5. (a) Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.
 (b) Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = 4 - 4e^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ s(t) = 4e^{-\frac{t}{4}} \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

EXERCICE 2 On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction y de la variable réelle t , solution de l'équation différentielle :

$$y''(t) + 4y(t) = e(t) \quad (1),$$

où la fonction e représente une contrainte extérieure au système.

On étudie un moyen d'amener le système vers un état d'équilibre de manière « lisse ».

À cette fin on soumet le système à une contrainte extérieure modélisée par la fonction e définie par :

$$e(t) = 8 \times t \times U(t) - 8 \times (t - \tau) \times U(t - \tau).$$

où τ désigne un nombre réel strictement positif et U la fonction échelon unité.

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $] -\infty ; 0[$.

On appelle g la fonction causale telle que :

$$g''(t) + 4g(t) = e(t)$$

et vérifiant : $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

On note $G(p)$ la transformée de Laplace de la fonction g et $E(p)$ la transformée de Laplace de la fonction e .

1. Exprimer $E(p)$ en fonction de p et de τ .

2. En déduire que : $G(p) = \frac{8}{p^2(p^2 + 4)} (1 - e^{-\tau p})$.

3. Déterminer les constantes réelles A et B telles que : $\frac{8}{p^2(p^2 + 4)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p^2 + 4}$.

4. Déterminer alors l'original de $\frac{8}{p^2(p^2 + 4)}$.

5. En déduire que, pour tout nombre t , on a : $g(t) = g_0(t) - g_0(t - \tau)$

avec $g_0(t) = (2t - \sin(2t))U(t)$.

6. Montrer que pour $t \geq \tau$, on a : $g(t) = 2\tau - \sin(2t) + \sin(2t - 2\tau)$.

7. On suppose maintenant que $\tau = \pi$, simplifier l'expression de $g(t)$ pour $t \geq \tau$.