

EXERCICE 1 Module et argument de $z = \frac{-2 + 2i}{\sqrt{3} - i}$ puis de z^3

$$|z| = \frac{|-2 + 2i|}{|\sqrt{3} - i|} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

puis

pour le numérateur $\cos \theta_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$

pour le dénominateur $\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta_2 = \frac{-1}{2}$ donc $\theta_2 = \frac{-\pi}{6}$

$$\text{donc } \arg(z) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12}$$

$$|z^3| = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \arg(z^3) = 3\arg(z) = \frac{11\pi}{4}$$

EXERCICE 2 Développer et réduire $(z^2 - 1)(z^2 + 4)$

$$(z^2 - 1)(z^2 + 4) = z^4 + 3z^2 - 4$$

En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^5 + 3z^3 - 4z = 0$

$$z^5 + 3z^3 - 4z = 0 \text{ ssi } z \times (z^4 + 3z^2 - 4) = 0 \text{ ssi } z = 0 \text{ ou } (z^4 + 3z^2 - 4) = 0$$

$$\text{ssi } z \times (Z^2 + 3Z - 4) = 0 \text{ en posant } Z = z^2$$

On reconnaît alors une équation du second degré $\Delta = 25 > 0$ donc $Z = 1$ ou $Z = -4$

$$\text{donc } z^2 = 1 \text{ ou } z^2 = -4 \quad \text{donc } z = 1 \text{ ou } z = -1 \text{ ou } z = -2i \text{ ou } z = 2i$$

Finalement les solutions sont $0, -1, 1, -2i$ et $2i$

EXERCICE 3

1. Montrer que $f(x) = \frac{1}{1 + jx}$.

$$f(x) = T(\omega) = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega} = \frac{1}{1 + jx}$$

2. En expliquant, calculer $\arg(f(1))$.

$$f(1) = \frac{1}{1 + j} \quad \text{donc } \arg f(1) = -\arg(1 + j) = -\frac{\pi}{4}$$

3. Par ailleurs, on note $G(x) = 20 \log |f(x)|$ le gain du système.

a) Montrer que $G(x) = -\frac{10}{\ln(10)} \ln(1 + x^2)$.

$$\begin{aligned} G(x) &= 20 \log |f(x)| = 20 \log \left| \frac{1}{1 + jx} \right| = \frac{20}{\ln 10} \ln \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \frac{20}{\ln 10} \times (-1) \times \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) = -\frac{10}{\ln 10} \ln(1 + x^2) \end{aligned}$$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0+} G(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(1+x^2) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0+} G(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) = +\infty \text{ et } -\frac{10}{\ln 10} < 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = -\infty$$

c) Établir le tableau de variation de la fonction G .

Pour tout $x > 0$, on a : $G'(x) = -\frac{10}{\ln(10)} \frac{2x}{1+x^2} < 0$ donc G est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$

x	0	$+\infty$
$G'(x)$	—	
$G(x)$	0	$-\infty$

4. Nature du filtre.

$$G(x) = -3 \text{ ssi } -\frac{10}{\ln(10)} \ln(1+x^2) = -3$$

$$\text{ssi } \ln(1+x^2) = \frac{3 \ln(10)}{10}$$

$$\text{ssi } 1+x^2 = \exp\left(\frac{3 \ln(10)}{10}\right)$$

$$\text{ssi } x^2 = \exp\left(\frac{3 \ln(10)}{10}\right) - 1$$

$$\text{ssi } x = \sqrt{\exp\left(\frac{3 \ln(10)}{10}\right) - 1}$$

La calculatrice nous donne $x \approx 0,998$, presque 1

Par ailleurs, G est strictement décroissante donc $G(x) > -3$ pour $x < 1$.

Pour que le gain reste supérieur à -3 il faut que $x < 1$, c'est à dire $\frac{\omega}{\omega_0} < 1$

donc $\omega < \omega_0$. C'est un filtre passe bas.

EXERCICE 4

Partie A - Lecture graphique

1. La teneur en humidité d'une poutre après 20 semaines de séchage est de 42 %.
2. Ces poutres sont vendues une fois que leur teneur en humidité est inférieure à 20 %.
Ces poutres peuvent elles être vendues au bout de 49 semaines.

Partie B - Teneur en humidité

1. a) D'après la ligne 4 du tableau, la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$ est égale à 0,1.

Si le temps de séchage augmente indéfiniment, il restera un taux d'humidité de 10 % dans la poutre.

- b) À l'aide du contexte, on peut conjecturer que la fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

- c) D'après la ligne 2 du tableau, $f'(t) = -0,028 e^{-0,04t}$.

Or, pour tout réel x , on a : $e^x > 0$ donc, pour tout t de $[0 ; +\infty[$, on a : $e^{-0,04t} > 0$ et donc $f(t) < 0$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. a) On résout pour t appartenant à $[0 ; +\infty[$ l'inéquation : $f(t) \leq 0,2$.

$$\frac{f(t)}{0,7} \leq 0,2 \iff 0,7 e^{-0,04t} + 0,1 \leq 0,2 \iff 0,7 e^{-0,04t} \leq 0,1 \iff e^{-0,04t} \leq \frac{0,1}{0,7}$$

$$\iff -0,04t \leq \ln\left(\frac{1}{7}\right) \iff t \geq -\frac{\ln\left(\frac{1}{7}\right)}{0,04}$$

$$\text{Or } -\frac{\ln\left(\frac{1}{7}\right)}{0,04} \approx 48,65 \text{ donc } t \geq 49.$$

- b) Il faut donc un temps de séchage d'au moins 49 semaines pour que la teneur en humidité soit inférieure à 20 %.