

Rappels : présentation soignée, exercices clairement séparés, résultats encadrés, tableaux à la règle et au crayon.

EXERCICE 1 Calculer le module et un argument de $z = \frac{-\sqrt{3} + i}{3 + 3i}$ puis de z^2

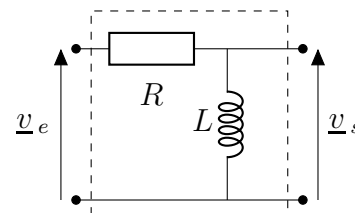
EXERCICE 2 Montrer que $z^3 + 6z - 20 = (z - 2)(z^2 + 2z + 10)$

En déduire toutes les solutions de $z^3 + 6z - 20 = 0$

EXERCICE 3

Le quadripole ci-contre est caractérisé par une fonction de transfert

$$T(\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}. \quad \text{où } \omega \text{ est la pulsation de } \underline{v}_e.$$



On note $\omega_0 = \frac{R}{L}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $T(\omega) = f(x)$.

1. Montrer que $f(x) = \frac{1}{1 - j\frac{1}{x}}$.
2. En expliquant, calculer $\arg(f(1))$.
3. Par ailleurs, on note $G(x) = 20 \log |f(x)|$ le gain du système.

a) Montrer que $G(x) = -\frac{10}{\ln(10)} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$.

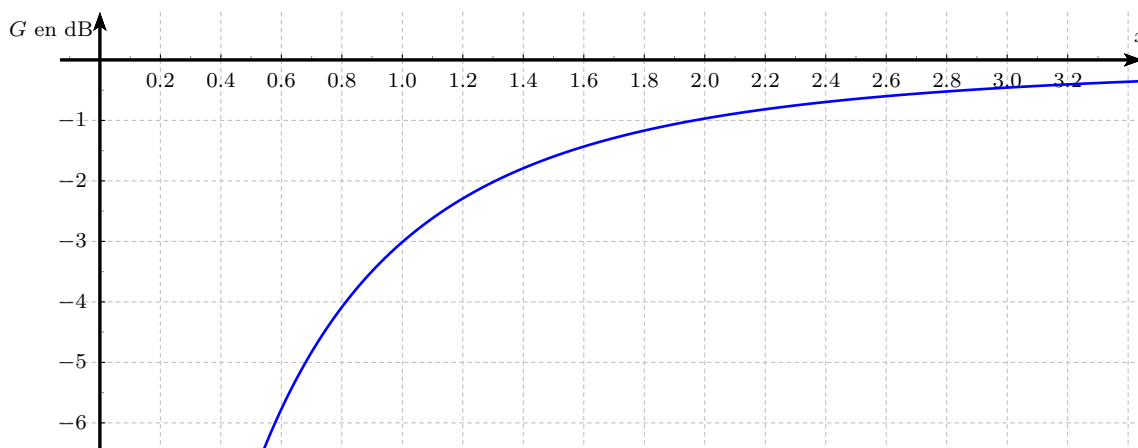
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0+} G(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

c) Un logiciel de calcul formel donne :

```
%e1 → dérive (-10/ln 10 *ln ( 1+ 1 /x^2 ))
%s1 → 20 / ( x * ( x ^ 2 + 1 ) * ln(10) )
```

En déduire le tableau de variation de la fonction G .

4. Un grapheur nous donne la courbe représentant G pour x variant de 0,05 à 3,45.



On appelle bande passante les fréquences pour lesquelles $G(x) > -3dB$. Déterminer graphiquement les valeurs de x puis de ω pour lesquelles le gain est supérieur à $-3dB$. En déduire la bande passante. Le dispositif électronique étudié est-il un filtre passe bas ou un filtre passe haut ?

EXERCICE 4 *Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées indépendamment*

Afin de vérifier la bonne isolation thermique d'un spa, on porte la température de l'eau, du spa à 38°C puis on coupe l'alimentation électrique du spa qui sert à chauffer l'eau.

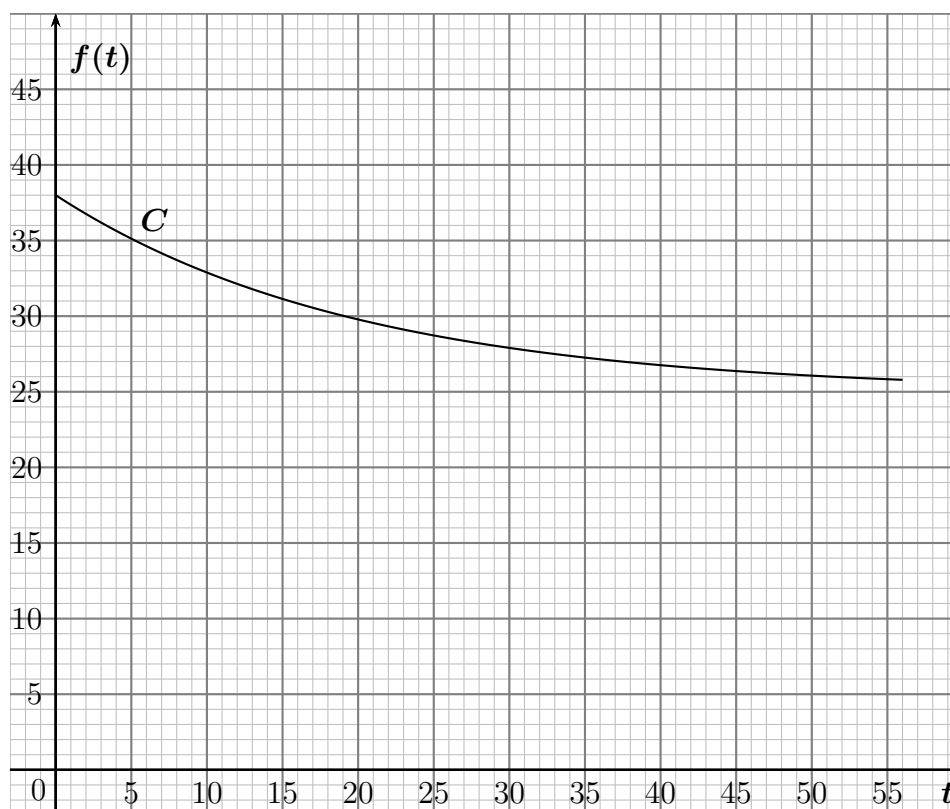
On s'intéresse à l'évolution de cette température en fonction du temps écoulé à partir de cette coupure.

La température de l'eau du spa est modélisée par une fonction f qui, à tout temps t (en heures) écoulé depuis la coupure de l'alimentation électrique, associe la température $f(t)$, en degré Celsius ($^\circ\text{C}$), de l'eau du spa au temps t . On admet que $f(0) = 38$.

Lors de cette vérification, la température ambiante extérieure au spa reste constante et égale à 25°C . On remarque que la température de l'eau du spa est de 37°C au bout de 1,5 h.

Partie A

Ci-dessous **à rendre avec la copie**, on a tracé la représentation graphique C de la fonction f dans un repère orthogonal. On utilisera cette représentation graphique pour répondre aux questions de cette partie.



1. Donner la valeur arrondie, au degré Celsius, de la température de l'eau du spa 22 heures après la coupure de l'alimentation électrique.

Faire apparaître les traits de construction correspondants sur le graphique de l'annexe.

2. La température de l'eau du spa descend-elle en-dessous de 27°C ?

Si oui, combien de temps après la coupure de l'alimentation électrique?

Faire apparaître les traits de construction correspondants sur le graphique de l'annexe.

3. On admet que la vitesse instantanée de variation de la température de l'eau du spa, exprimée en degrés Celsius par heure ($^{\circ}\text{C/h}$), à un temps donné t_0 , est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse t_0 .

Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

- a) Proposition A : « toutes les heures, la température de l'eau du spa baisse du même nombre de degrés Celsius. »
- b) Proposition B : « la vitesse instantanée de variation de la température de l'eau du spa au temps $t_0 = 15$ h est environ égale à -1°C/h . »

Partie B

On admet que, pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$f(t) = 13e^{-0,05t} + 25.$$

1. Calculer la valeur arrondie à 10^{-1} de $f(24)$.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

2.
 - a) Pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, déterminer une expression de $f'(t)$.
 - b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Ce sens de variation paraît-il cohérent avec le contexte de l'exercice?
Argumenter.

3.
 - a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - b) Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

4. Une alarme sonore est émise quand la température de l'eau du spa devient strictement inférieure à une température programmée par l'utilisateur. L'utilisateur programme la température de l'eau du spa à 36°C .

Déterminer, par le calcul, combien de temps après la coupure de l'alimentation électrique cette alarme sonore retentira.