

EXERCICE 1 Calculer le module et un argument de $z = \frac{-\sqrt{3} + i}{3 + 3i}$ puis de z^2

• $|Z| = \frac{|-\sqrt{3} + i|}{|3 + 3i|} = \frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{9+9}} = \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ par ailleurs $\arg(Z) = \arg(-\sqrt{3} + i) - \arg(3 + 3i)$
or

$|-\sqrt{3} + i| = 2$ puis $\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc le cercle trigonométrique donne $\arg(-\sqrt{3} + i) = \frac{5\pi}{6}$

et $|3 + 3i| = 3\sqrt{2}$ puis $\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc le cercle trigonométrique donne $\arg(3 + 3i) = \frac{\pi}{4}$

enfin $\arg(Z) = \arg(-\sqrt{3} + i) - \arg(3 + 3i) = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$

On a donc obtenu que Z a pour module $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et pour argument : $\frac{7\pi}{12}$

• $|Z^2| = |Z|^2 = \frac{2}{9}$ et $\arg(Z^2) = 2 \times \arg(Z) = \frac{7\pi}{6}$ ou, mieux, $\frac{-5\pi}{6}$

On a donc obtenu que Z^2 a pour module $\frac{2}{9}$ et pour argument : $\frac{-5\pi}{6}$

EXERCICE 2 Montrer que $z^3 + 6z - 20 = (z - 2)(z^2 + 2z + 10)$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $(z - 2)(z^2 + 2z + 10) = z^3 + 2z^2 + 10z - 2z^2 - 4z - 20 = z^3 + 6z - 20$

En déduire toutes les solutions de $z^3 + 6z - 20 = 0$

$z^3 + 6z - 20 = 0$ équivaut à $(z - 2)(z^2 + 2z + 10) = 0$ ce qui équivaut à $z = 2$ ou $z^2 + 2z + 10 = 0$

Réolvons $z^2 + 2z + 10 = 0$. On a $\Delta = 4 - 40 = -36 < 0$ il y a deux racines complexes conjuguées,

$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{36}}{2 \times 1} = -1 - 3i$ et $z_2 = -1 + 3i$

Finalement $z^3 + 6z - 20 = 0$ a pour solutions $S = \{2 ; -1 - 3i ; -1 + 3i\}$

EXERCICE 3

1. Montrer que $f(x) = \frac{1}{1 - j\frac{1}{x}}$.

$f(x) = T(\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{1}{\frac{R}{jL\omega} + 1}$ en divisant numérateur et dénominateur par $jL\omega$

Or $\omega_0 = \frac{R}{L}$ donc $\frac{R}{jL\omega} = \frac{R}{L} \times \frac{1}{j\omega} = \omega_0 \times \frac{1}{j\omega} = -j\frac{\omega_0}{\omega} = -j\frac{1}{x}$ car $\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Finalement : $f(x) = \frac{1}{1 - j\frac{1}{x}}$

2. En expliquant, calculer $\arg(f(1))$.

$$\arg(f(1)) = \arg \frac{1}{1-j} = \arg \frac{1+j}{2} = \arg(1+j) - 0$$

$$\text{or } |1+j| = \sqrt{2} \text{ donc } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{donc le cercle trigonométrique donne } \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Finalement : } \boxed{\arg(f(1)) = \frac{\pi}{4}}$$

3. Par ailleurs, on note $G(x) = 20 \log |f(x)|$ le gain du système.

a) Montrer que $G(x) = -\frac{10}{\ln(10)} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

$$G(x) = 20 \log |f(x)| = 20 \times \frac{1}{\ln(10)} \times \ln |f(x)| = \frac{20}{\ln 10} \times \ln \left| \frac{1}{1-j\frac{1}{x}} \right| = \frac{20}{\ln 10} \times \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\text{puis } G(x) = -\frac{20}{\ln 10} \times \ln \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -\frac{20}{\ln 10} \times \frac{1}{2} \times \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{10}{\ln(10)} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0+} G(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0+} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \quad \text{or } -\frac{10}{\ln(10)} < 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{10}{\ln(10)} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \text{ c'est à dire } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0+} G(x) = -\infty}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{10}{\ln(10)} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \text{ c'est à dire } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0}$$

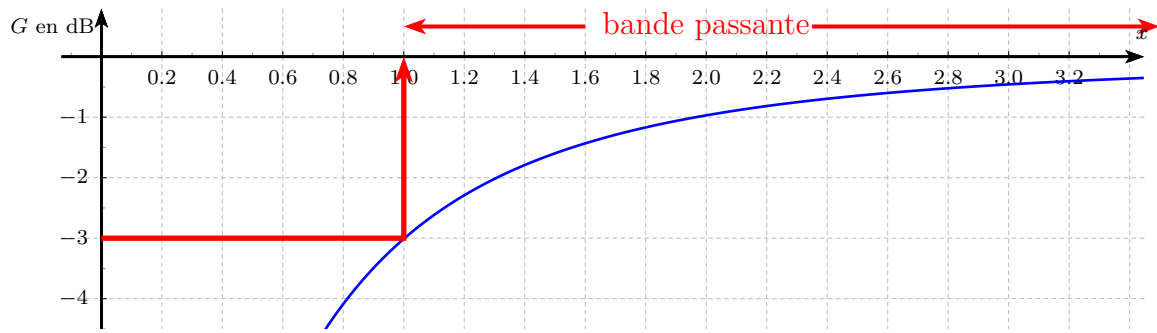
c) Le tableau de variation de la fonction G .

Le logiciel nous donne pour tout $x > 0$, $G'(x) = \frac{20}{x(1+x^2)\ln(10)}$ or tous les facteurs

sont positifs, donc la dérivée est strictement positive, la fonction G est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$G'(x)$		+
G		↗

4. Un grapheur nous donne la courbe représentant G pour x variant de 0,05 à 3,45.



Le gain est supérieur à -3 pour tous les $x > 1$, c'est à dire les $\frac{\omega}{\omega_0} > 1$ c'est à dire $\omega > \omega_0$, c'est à dire pour les fréquences supérieures à $2\pi\omega_0$. C'est un filtre passe-haut.

EXERCICE 4

Partie A

1. Donner la valeur arrondie, au degré Celsius, de la température de l'eau du spa 22 heures après la coupure de l'alimentation électrique.

On lit une température environ égale à 29,5 degrés Celsius

2. La température de l'eau du spa descend-elle en-dessous de 27 ° C ?

Si oui, combien de temps après la coupure de l'alimentation électrique ?

La courbe descend en dessous de la droite horizontale correspondant à 27° environ 36h après l'arrêt du chauffage.

3. On admet que la vitesse instantanée de variation de la température de l'eau du spa, exprimée en degrés Celsius par heure (°C/h), à un temps donné t_0 , est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse t_0 .

Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

- a) Proposition A : Non le graphe n'est pas une droite donc la température ne descend régulièrement d'un degré toutes les heure.
- b) Proposition B : non la variation instantanée, qui correspond à la pente de la tangente n'est pas de -1°/h »

Partie B

On admet que, pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$f(t) = 13e^{-0,05t} + 25.$$

1. Calculer la valeur arrondie à 10^{-1} de $f(24)$.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On a $f(24) \approx 28,9$, cela signifie qu'après 24h la température du spa est d'environ 28,9 degrés Celsius.

2. a) Pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, déterminer une expression de $f'(t)$.

Pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, on a : $f'(t) = 13 \times (-0,05) \times e^{-0,05t} = -0,65 \times e^{-0,05t}$

- b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $f'(t) < 0$ car $-0,65 < 0$ et $e^{-0,05t} > 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

Ce sens de variation paraît-il cohérent avec le contexte de l'exercice ?

Ceci est cohérent avec le contexte car le spa refroidi.

3. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,05t} = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 + 25 = 25$

- b) Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

Si on laisse le spa refroidir indéfiniment alors il prendra la température ambiante de 25°C

4. Une alarme sonore est émise quand la température de l'eau du spa devient strictement inférieure à une température programmée par l'utilisateur. L'utilisateur programme la température de l'eau du spa à 36 °C.

Déterminer, par le calcul, combien de temps après la coupure de l'alimentation électrique cette alarme sonore retentira.

On résout : $f(t) < 36$ cela équivaut à $13e^{-0,05t} + 25 < 36$

donc à $13e^{-0,05t} < 11$

puis à $e^{-0,05t} < \frac{11}{13}$

puis à $-0,05t < \ln \frac{11}{13}$ car $\ln$ est une fonction strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

et enfin à $t > \frac{1}{-0,05} \times \ln \frac{11}{13}$ c'est à dire $t > 3,34$ h environ

L'alarme va retentir à partir de 3h20min environ.